

## раздел МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА

УДК 532.5

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.2.1

### ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ГИДРОРАЗРЫВА С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОППАНТА

© А. В. Татосов, К. А. Бородина\*

Тюменский государственный университет  
Россия, 625003 г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

\*Email: k.a.borodina@utmn.ru

*Рассмотрен процесс формирования трещины гидроразрыва при закачивании в скважину вязкой жидкости с примесью частиц. Предложена модель развития трещины с учетом концентрации проппанта у берегов трещины, потерь жидкости на просачивание в пористую среду и падения взвешенных частиц под действием силы тяжести. Наличие частиц существенно влияет на процесс раскрытия трещины. Рост трещины ограничен, окончательная ее форма зависит от способа закачки и состава смеси. Представленная модель позволяет охарактеризовать остаточную форму трещины или подобрать технологические параметры для достижения желаемых результатов при разрыве пласта.*

**Ключевые слова:** трещина гидроразрыва, пористая среда, движение проппанта.

#### Введение

Для повышения дебита нефтяных скважин применяется технология гидроразрыва пласта. В основополагающих работах [1–3] обоснованы формы и построены теории развития трещины гидроразрыва, качественный обзор проведен в [4]. С целью формирования остаточной трещины в скважину подается вязкая жидкость (жидкость гидроразрыва) с примесью твердых частиц (проппант). Перенос проппанта связан с разнообразными эффектами, такими как конвекция [5–6] и формирование областей плотно упакованного проппанта [7]. В последнее время укрепилось понимание важности учета различия осредненных скоростей жидкости и проппанта [8]. В работе [9] рассмотрены дополнительные механизмы, влияющие на разницу скоростей несущей жидкости и проппанта; учтена фильтрация жидкости через проппантную упаковку, что позволяет рассматривать движение в полости трещины смеси с более высокой концентрацией частиц.

В данной работе предложена модель подачи проппанта в раскрывающуюся трещину гидроразрыва пласта с учетом потерь жидкости на просачивание в пористую среду и концентрации проппанта у берегов трещины. Траектории жидких частиц представляют собой расходящийся пучок линий, пронизывающих пористую поверхность. Твердые частицы следуют за ними ввиду вкрапления в вязкий гель, но ограничены поверхностью трещины. Таким образом, дисперсная фаза концентрируется у пористых берегов, образуя вязкий малоподвижный подслои.

#### Математическая постановка задачи

**Допущения.** Движение жидкости с примесью частиц вдоль трещины опишем в квазиодномерном приближении. Трещина гидроразрыва предполагается вертикальной (рис. 1). Движением сконцентрированной у берегов трещины дисперсной фазы пренебрегаем, считая ее вертикальным осадком. При использовании сильновязких синтетических гелей гравитационное осаждение не столь существенное: несмотря на малую скорость фильтрации, жидкость просачивается в пористую среду через боковую поверхность полости, площадь которой значительно превосходит площадь сечения Христиановича.

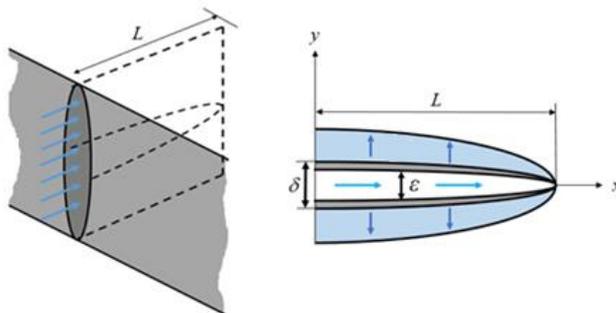


Рис. 1. Схематическое представление трещины.

**Форма трещины.** На основании гипотезы Перкинса [1] с учетом формы плоских трещин в упругой среде введем связь избыточного давления  $p$  со средней шириной  $\delta$  трещины [10]

$$p = b\delta, b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h}, \quad (1)$$

где  $\nu_\sigma$  – коэффициент Пуассона;  $\mu_\sigma$  – модуль сдвига материала. Геометрическая форма трещины такова, что

$$\delta \ll h \ll L.$$

Здесь  $h, L$  – соответственно высота и длина трещины. На носике трещины, в приближении Перкинса, избыточное давление равно нулю

$$x = L(t): p = 0.$$

Площадь поперечного сечения полости  $S = \delta h$ . Выделим часть сечения свободного от осадка, пусть  $s = \varepsilon h$  площадь свободной области.

**Уравнения неразрывности.** Скорость движения жидкости и взвешенных частиц в продольном направлении будем считать одинаковой. Продольный поток вещества происходит только по свободной области. Уравнения неразрывности, отражающие сохранение общей массы смеси и частиц в трещине, имеют вид

$$\frac{\partial((S-s)\rho_* + s\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(s\rho u)}{\partial x} = -\rho_l Q_l, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((S-s)C_*\rho_* + sC\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(sC\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho_*$  – плотности смеси в свободной области и в осевшем слое

$$\rho = (1 - \alpha_2)\rho_l + \alpha_2\rho_p, \rho_* = (1 - \alpha_*)\rho_l + \alpha_*\rho_p; \quad (4)$$

$\rho_l, \rho_p$  – истинные плотности жидкости гидроразрыва и частиц;  $\alpha_2, \alpha_*$  и  $C, C_*$  – объемные и массовые содержания частиц в указанных областях, при этом

$$C = \frac{\alpha_2\rho_p}{\rho}, C_* = \frac{\alpha_*\rho_p}{\rho_*}; \quad (5)$$

$u$  – средняя скорость потока смеси,  $Q_l$  – интенсивность потерь жидкости гидроразрыва через боковую поверхность трещины вследствие протекания в грунт.

Из (2)–(3) с учетом (4)–(5) вытекают условия сохранения общего объема смеси и проппанта

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = -Q_l, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(S-s+\alpha s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha su)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

где введена переменная  $\alpha = \alpha_2/\alpha_*$ , принимающая значения от нуля до единицы.

**Динамика осаждения частиц.** Рост осадка обусловлен двумя процессами – накоплением за счет просачивания жидкости гидроразрыва в пористую среду и действием силы тяжести; также учтем возможность возврата частиц в поток ввиду шероховатости боковой поверхности

$$\frac{\partial(S-s)}{\partial t} = f_{in} - f_{out} + f_g.$$

Без учета силы тяжести и возврата частиц будем иметь в свободной области

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0.$$

Совместно с (6)–(7) находим интенсивность роста осадка на единицу длины трещины, обусловленного просачиванием жидкости гидроразрыва в грунт

$$f_{in} = \frac{\alpha}{1-\alpha} Q_l.$$

Пусть  $w_g$  – скорость гравитационного падения взвешенной частицы относительно берегов трещины. В системе координат, связанной с контактной поверхностью П, отделяющей гравитационный осадок, условие равенства потоков дисперсной фазы по обе стороны от поверхности дает  $\alpha_2(w_g + w_s) = \alpha_* w_s$ . Здесь  $w_s$  – скорость движения контактной поверхности П. Скорость роста объема осадка за счет падения взвешенных частиц, отнесенная к единице длины трещины, есть  $\varepsilon w_s$ , так что

$$f_g = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varepsilon w_g.$$

Интенсивность срыва приблизившихся к берегам трещины частиц в поток представим в виде  $f_{out} = f_{in}f$ , где  $f$  характеризует долю вовлеченных обратно в поток частиц. Максимально возможное (единичное) значение функции срыва достигается при высокой концентрации частиц в смеси, а также при приближении к носiku трещины, где градиент давления высокий. Примем для  $f$  следующее модельное представление

$$1 - f = (1 - \alpha)(1 - \varphi), \quad (8)$$

$$\varphi = \begin{cases} |\partial p / \partial x| / |\partial p / \partial x|_*, & |\partial p / \partial x| \leq |\partial p / \partial x|_* \\ 1, & |\partial p / \partial x| > |\partial p / \partial x|_* \end{cases}$$

Считаем, что срыв частиц обусловлен градиентом давления. При превышении критического значения, отмеченного звездочкой, все частицы возвращаются в поток. При меньших значениях часть дисперсной фазы остается у берегов трещины.

Учитывая влияние указанных процессов на динамику роста осадка, получим

$$\frac{\partial(S-s)}{\partial t} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ (1-f)Q_l + \frac{s}{h}w_g \right]. \quad (9)$$

Утечку жидкости в породе определим согласно [9; 11]

$$Q_l = \frac{2(1-\alpha_*)hc_l}{\sqrt{t-t_{exp}(x)}} = \frac{2c_l(1-\alpha_*)h}{\sqrt{t-t_{exp}(x)}}, \quad (10)$$

где  $C_l$  – коэффициент утечки,  $t_{exp}(x)$  – момент времени достижения кончиком трещины точки  $x$ . Аппроксимируем  $w_g$  согласно [5; 12]

$$w_g = \frac{(1-\alpha_*)\eta}{\eta_\alpha} w_{g0}, \quad w_{g0} = \frac{2(\rho_p - \rho_l)gr^2}{9\eta}, \quad \eta_\alpha = \eta(1-\alpha)^{-m}, \quad (11)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $r$  – радиус частиц;  $\alpha_* = 0.66$ ,  $m = 1.82$ ; что соответствует стоксовому движению частицы в вязкой суспензии.

Уравнения (7), (9) с учетом (6) представим в более удобном виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = -Q_l - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ (1-f)Q_l + \frac{s}{h}w_g \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\alpha s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha su)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ (1-f)Q_l + \frac{s}{h}w_g \right]. \quad (13)$$

**Уравнение импульсов.** В силу принятых ограничений на геометрические параметры трещины в уравнении движения смеси целесообразно пренебречь инерционным слагаемым. Согласно принятым допущениям о движении дисперсной фазы, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta_\alpha}{\varepsilon^2} u. \quad (14)$$

где  $\eta_\alpha$  – вязкость смеси.

**Основная система уравнений.** Все приведенные выше уравнения движения имеют место лишь при условии существования свободной от осадка области течения. Будем считать, что поток смеси вдоль трещины возможен только при  $s > 0$ . Если же в некотором сечении  $s = 0$ , а  $S > 0$ , то трещина перекрыта. В таком сечении движение смеси отсутствует, избыточное давление падает до нуля, просачивание приостанавливается. Раскрытая трещина при этом удерживается слоем частиц, находящемся в напряженном состоянии. Положим в дальнейшем  $h, b = \text{const}$ . Систему уравнений (6), (12)–(14) приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -v, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -v - \frac{\alpha}{1-\alpha} [(1-f)v + w], \\ \frac{\partial(\alpha \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} [(1-f)v + w], \\ u &= -\frac{b}{12\eta_\alpha} \varepsilon^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}; \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$v = \begin{cases} Q_l/h, \varepsilon > 0 \\ 0, \varepsilon = 0 \end{cases}, \quad w = \begin{cases} (\varepsilon/h)w_g, \varepsilon > 0 \\ 0, \varepsilon = 0 \end{cases}.$$

Величины  $b, f, Q_l, w_g, \eta_\alpha$  определены выражениями (1), (8), (10), (11).

Система (16) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t): \quad \delta = 0. \quad (16)$$

и граничным условием на входе в трещину

$$x = 0: \quad su = h\varepsilon u = Q_{in}(t), \quad \alpha = \alpha_{in}(t). \quad (17)$$

Предложенная модель при  $f = 0, w = 0$  соответствует неизменному объемному содержанию проппанта в смеси  $da/dt = 0$ ; в обратном предельном случае  $f = 1, w = 0$  – сохранению объема (массы) проппанта в общем потоке  $d(\alpha s)/dt = 0$ .

### Верификация

Типичным является случай подачи жидкости гидроразрыва с постоянным расходом. Примем следующие параметры:

- полный расход в одно крыло трещины  $Q_0 = 1$  (м<sup>3</sup>/мин);
- модуль сдвига материала  $\mu_\sigma = 8.5 \cdot 10^9$  (Па);
- коэффициент Пуассона  $\nu_\sigma = 0.25$ ;
- высота трещины  $h = 20$  (м);
- вязкость жидкости гидроразрыва  $\eta = 40 \cdot 10^{-3}$  (Па · с).

При отсутствии утечки в грунт система (15) допускает автомодельное решение [13]; ширина во входном сечении

$$\delta \approx 1.33 D^* t^{1/5}, \quad D^* = \left( \frac{Q_0^2}{h^2 K} \right)^{1/5}, \quad K = \frac{b}{12\eta};$$

длина трещины

$$L \approx 0.88 U^* t^{4/5}, \quad U^* = \frac{Q_0}{D^* h}.$$

На рис. 2 представлено сопоставление автомодельного решения с численным расчетом с условиями на входе  $Q_{in}(t) = Q_0$ ,  $\alpha_{in}(t) = 0$ . Результаты численного расчета представлены для некоторых моментов времени. В случае постоянного притока жидкости в трещину имеем монотонное расширение полости во входном сечении. Длина трещины также непрерывно возрастает, но функциональные зависимости различны.

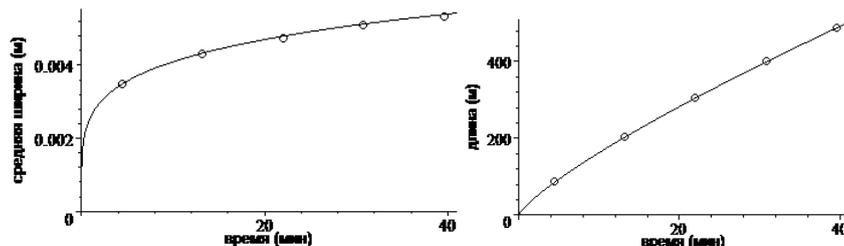


Рис. 2. Ширина трещины в начальном сечении (слева), длина трещины (справа) в зависимости от времени. Сплошная линия – автомодельное решение, точки – численный расчет.

### Заключение

Предложена математическая модель развития и формирования трещины гидроразрыва пласта с учетом потерь жидкости в пористую среду. Модель учитывает влияние силы тяжести и рассогласование скоростей жидкой и дисперсной фаз, связанное с изменением концентрации частиц в поперечном сечении. Корректность разностной схемы подтверждена сопоставлением численного расчета с известным автомодельным решением.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., Paper SPE 89. 1961. Vol. 13. No. 9. P. 937–949.
2. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. Paper 7834. 1972. Vol. 12. No. 8. P. 306–314.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. 1955. С. 3–41.
4. Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.
5. Mobbs A. T., Hammond P.S. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // SPE Production and Facilities. 2001. Vol. 16. No. 2. P. 112–121.
6. Hammond P. S. Settling and slumping in a newtonian slurry, and implications for proppant placement during hydraulic fracturing of gas wells // Chemical engineering science. 1995. Vol. 50. No. 20. P. 3247–3260.
7. Varee R. D., Conway M. W. Proppant holdup, bridging, and screenout behavior in naturally fractured reservoirs // SPE Production and Operations Symposium. Society of Petroleum Engineers. 2001.
8. Osipov A. A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2017. Vol. 156. P. 513–535.
9. Карнаков П. В., Лапин В. Н., Черный С. Г. Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. №1. С. 19–33.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Carter R. D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // Drilling and Production Practice / Ed. by G. C. Howard, C. R. Fast. N. Y.: American Petrol. Institute, 1957. P. 261–270.
12. Лапин В. Н. Моделирование распространения трещин, нагруженных давлением вязкой жидкости // диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН». 2023. 297 с.
13. Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2003. №6. С. 28–36.

Поступила в редакцию 07.02.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.2.1

## MOVEMENT OF HYDRAULIC FRACTURING FLUID WITH NONUNIFORM PROPPANT DISTRIBUTION

© A. V. Tatosov, K. A. Borodina\*

*University of Tyumen  
6 Volodarsky St., 625003 Tyumen, Russia.*

*\*Email: k.a.borodina@utmn.ru.*

The process of formation of a hydraulic fracturing crack when a viscous fluid with an admixture of particles is pumped into a well is considered. A model of fracture development is proposed, taking into account proppant concentration near the fracture surfaces, fluid loss due to seepage into a porous medium, and the fall of suspended particles under the influence of gravity. The presence of particles significantly affects the process of crack opening. Fracture growth is limited, its final shape depends on the injection method and mixture composition. The presented model allows one to characterize the residual shape of a crack or select technological parameters to achieve the desired results during formation fracturing.

**Keywords:** hydraulic fracture, porous medium, proppant movement.

*Received 07.02.2024.*