

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАССОВОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ НА СПЕКТР ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

© В. П. Павлов, Э. М. Нусратуллин, Л. Р. Нусратуллина*

*Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Email: mardliliya@yandex.ru

В статье аналитически и с использованием сплайн-метода алгебраических полиномов пятой степени проведена оценка влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр частот свободных поперечных колебаний прямого однородного стержня. С использованием численных расчетов высокой точности показано, что в стержне, длина которого существенно превышает поперечные размеры, при расчете спектра частот свободных колебаний, влиянием массового момента инерции можно пренебречь, а продольная сила оказывает заметное влияние только на низшие частоты.

Ключевые слова: *стержень, поперечные колебания, численный метод, краевые условия, метод алгебраических полиномов, массовый момент инерции, продольная сила.*

Введение

Поперечные колебания стержня при самых общих предположениях относительно действующих сил, жесткости и распределения масс описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка вида [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - f(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

где $w = w(x, t)$ – функция перемещения точек осевой линии стержня от координаты x и времени t ; $\mu = \mu(x)$ – масса единицы длины стержня, EI – жесткость на изгиб стержня (E – модуль упругости материала стержня, I – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний); I_0 – массовый момент инерции; $p(x, t)$ – продольная сила; $f(x, t)$ – распределенная поперечная нагрузка. При расчете частот свободных колебаний $f(x, t) \equiv 0$.

При расчете спектра частот свободных колебаний стержней, длины которых значительно превышают поперечные размеры, обычно пренебрегают массовым моментом инерции и опускают в левой части уравнения (1) последнее слагаемое. Это упрощает дифференциальное уравнение и дает возможность решить его аналитически [1–2]. Однако при нахождении частот колебаний или других технических расчетах высокой точности может потребоваться учесть влияние на конечный результат всех слагаемых в (1). Это влияние может иметь важное значение при исследовании форм колебаний с высокими частотами, когда колеблющийся стержень разделяется узловыми поперечными сечениями на сравнительно короткие отрезки [2].

В данной статье аналитически и с использованием численного метода алгебраических полиномов пятой степени (далее – МАП5) [4–7] будет проведено исследование влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр частот собственных свободных колебаний стержня.

Аналитическое решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний стержня

Положив в (1) постоянными значения $p(x, t) \equiv p$, жесткости EI , погонной массы μ , массового момента инерции I_0 , получим дифференциальные уравнения поперечных колебаний стержня в виде:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Решение (2) будем искать в виде:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t, \quad (3)$$

где $W = W(x)$ – форма колебаний, ω – круговая частота собственных колебаний.

Подставляя **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получим следующее уравнение для нахождения частот:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{p + \omega^2 I_0}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2}{EI} W(x) = 0. \quad (4)$$

При обозначениях

$$\begin{cases} x = l\tilde{x}, & \tilde{x} \in [0, 1] \\ W = W_0 \tilde{w}, & \tilde{w} \in [0, 1], \end{cases} \quad (5)$$

где W_0 – масштабный коэффициент с размерностью перемещения и $\tilde{\omega}^2 = \frac{\mu \omega^2 l^4}{EI}$, уравнение (4) приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{\tilde{\omega}^2 I_0}{\mu l^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0. \quad (6)$$

Для аналитического решения задачи (6) в общем виде составим характеристическое уравнение для (6):

$$k^4 - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{\tilde{\omega}^2 I_0}{\mu l^2} \right) k^2 - \tilde{\omega}^2 = 0. \quad (7)$$

Решив характеристическое уравнение (7), находим его корни:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)^2 + 4\tilde{\omega}^2 + \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)}{2}}, \quad (8)$$

$$k_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)^2 + 4\tilde{\omega}^2 - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)}{2}}.$$

Тогда аналитическое решение дифференциального уравнения (6) имеет вид:

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = C_1 e^{\lambda_1 \tilde{x}} + C_2 e^{-\lambda_1 \tilde{x}} + C_3 \sin(\lambda_2 \tilde{x}) + C_4 \cos(\lambda_2 \tilde{x}), \quad (9)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – коэффициенты, определяемые из краевых условий различного закрепления стержня по концам, а величины λ_1, λ_2 определяются выражениями:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)^2 + 4\mu \tilde{\omega}^2 + \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)}{2}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)^2 + 4\mu \tilde{\omega}^2 - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right)}{2}}.$$

Коэффициенты при C_1, C_2, C_3, C_4 из (9) занесем в квадратную матрицу B порядка 4. В результате задача нахождения собственных частот сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы B при равенстве нулю ее определителя [1].

Характеристическим определителем матрицы B будет нелинейная функция $F(\lambda_1(\tilde{\omega}), \lambda_2(\tilde{\omega}))$.

Нелинейное уравнение

$$F(\lambda_1(\tilde{\omega}), \lambda_2(\tilde{\omega})) = 0 \quad (10)$$

решалось методом деления пополам с точностью расчетов до 6 знаков после запятой.

Далее, по найденным $\tilde{\omega}$, находим круговую частоту ω :

$$\omega_m = \frac{\tilde{\omega}_m}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad m = \overline{1, 5}. \quad (11)$$

Численный метод алгебраических полиномов степени 5 для расчета спектра частот собственных свободных колебаний однородного стержня

Для реализации численного метода алгебраических полиномов на отрезке $[0, 1]$ формируется разбиение Ω с N узлами:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1, \quad (12)$$

с шагом сетки $h_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{1, N-1}$.

На отрезках сетки Ω по методике, описанной в [3–7], рассматриваются функции $P_5^{(i)}(x)$ пятой степени, являющиеся полиномами пятой степени:

$$\begin{cases} P_5^{(i)}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha} \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (13)$$

Для удобства сведем искомые коэффициенты полинома $P_5^{(i)}(x) \{ \leftrightarrow a_{\alpha}^{(i)} \}$, $\alpha = \overline{0, 5}$, $i = \overline{1, N-1}$, в вектор-столбец $Q = (q_k, k = \overline{1, 6(N-1)})^T$.

На полиномы $P_5^{(i)}(x)$ и их производные до 4-го порядка включительно накладываются условия непрерывности во внутренних узлах сетки для смежных отрезков в общей точке x_i , $i = \overline{2, N-1}$:

$$\begin{cases} \frac{d^s P_5^{(i-1)}(x_i)}{dx^s} = \frac{d^s P_5^{(i)}(x_i)}{dx^s} \\ s = \overline{0,4}, \quad i = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (14)$$

На основе полиномов $P_5^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, N-1}$ строится обобщенный полином $P_5(x)$:

$$P_5(x) = \begin{cases} P_5^{(i)}(x_i) & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ i = \overline{1, N-1} \\ P_5^{(N-1)}(x_i) & \text{при } x = x_N \end{cases} \quad (15)$$

и ее производные:

$$R_s = \frac{d^s P_5(x)}{dx^s}, \quad s = \overline{0,4}. \quad (16)$$

Заменой в (4) искомой функции $\tilde{w} = \tilde{w}(\tilde{x})$ аппроксимирующей функцией $P_5(x)$ и с учетом (16) получим дискретный аналог уравнения поперечных колебаний стержня:

$$R_4(x_i) - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{\tilde{\omega}^2 I_0}{\mu l^2} \right) R_2(x_i) - \tilde{\omega}^2 R(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Коэффициенты уравнений (17) и (14) занесем в квадратную матрицу A . В результате получим систему из $6(N-1) - 4$ линейных однородных уравнений:

$$AQ = 0, \quad (18)$$

которая дополняется 4 краевыми условиями, которые будут приведены ниже.

Частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}$ определяются из условия равенства нулю определителя матрицы D :

$$\det A = 0. \quad (19)$$

Задача нахождения собственных частот колебаний стержня сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы A .

Задача (19) была решена методом перебора [8] с точностью до шести знаков после запятой.

Модельная задача для однородного прямого стержня, шарнирно закрепленного по концам

Для оценки влияния массового момента инерции стержня и продольной силы на спектр частот собственных колебаний, рассмотрим прямой однородный стержень длиной l , шарнирно закрепленный по концам, с круглым поперечным сечением диаметра D (рис. 1). Стержень изготовлен из стали с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $D = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м.

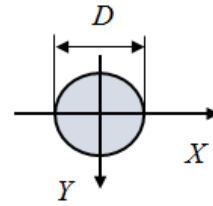


Рис. 1. Сечение стержня

Геометрические характеристики стержня с кольцевым сечением будут следующие:

$$\begin{cases} A = \pi D^2 / 4 = 1.76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ I = \pi D^4 / 64 = 2.49 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4, \\ \mu = A \rho = 1.38 \text{ кг/м}, \\ I_0 = I \cdot \rho = 1.96 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}. \end{cases} \quad (20)$$

Задачу для стержня с продольной силой и массовым моментом инерции с краевыми условиями шарнирного закрепления на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) концах запишем безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0, \\ \tilde{w}(0) = \frac{\partial^2 \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \tilde{w}(1) = \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Задачу (21) назовем «модельной задачей 1».

Модельная задача для однородного прямого стержня с жестким закреплением слева и свободным правым концом

Рассмотрим тот же самый стержень, но жестко закрепленный на левом конце при $x = 0$ и свободный на правом конце при $x = l$. Для такого стержня задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - \left(\frac{pl^2}{EI} + \frac{I_0 \tilde{\omega}^2}{\mu l^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0 \\ \tilde{w}(0) = \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial^3 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Задачу (22) назовем «модельной задачей 2».

Оценка влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр собственных частот свободных колебаний стержня аналитическим способом

Вначале рассмотрим поперечные свободные колебания ненагруженного стержня без продольной силы ($p = 0$) и массового момента инерции ($I_0 = 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0 \\ \tilde{w}(0) = \frac{\partial^2 \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \tilde{w}(1) = \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Для оценки влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр частот рассмотрим относительное расхождение частот ω_m^i задачи (23) и частот ω_{Tm}^i модельных задач 1 и 2:

$$\Delta_i = \left| \frac{\tilde{\omega}_{Tm}^i - \tilde{\omega}_m^i}{\tilde{\omega}_m^i} \right|, \quad i = 1, 2, \quad m = \overline{1, 5},$$

где i – номер модельной задачи, ω_{Tm}^i – точные значения собственных частот модельных задач 1 и 2, $\tilde{\omega}_m^i$ – точные значения собственных частот задачи (23), определенные аналитическим способом, m – номер формы собственных колебаний.

На рис. 2 приведен график относительного расхождения Δ_1 собственных частот стержня из модельной задачи 1, при $p = 0$ и с массовым моментом инерции, вычисленного согласно входным данным ($I_0 = I\rho = 1.96 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}$) и частотам задачи (23). По графику видно, что для стержней, длина которых существенно превышает поперечные размеры, при расчете частот массовым моментом инерции можно пренебречь, так как его влияние не превышает 1%.

На рис. 3–6 приведены графики Δ_1 для модельной задачи 1 для стержня, нагруженного продольной силой $p = A \cdot \sigma$, где σ равно $1 \cdot 10^7$; $5 \cdot 10^7$; $1 \cdot 10^8$; $1.5 \cdot 10^8$ Па с учетом массового момента инерции.

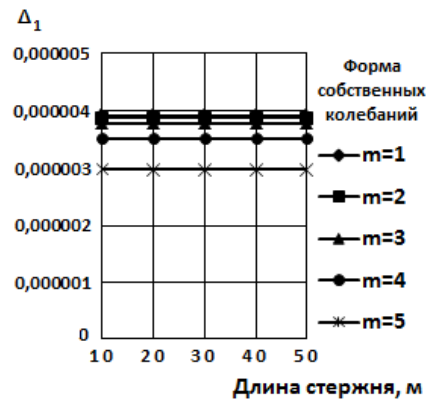


Рис. 2. Вариант $\sigma = 0$ Па и $I_0 = I\rho$

Из приведенных графиков видно, что продольная сила оказывает заметное влияние только на низкие частоты и при этом с увеличением напряжения σ это влияние усиливается.

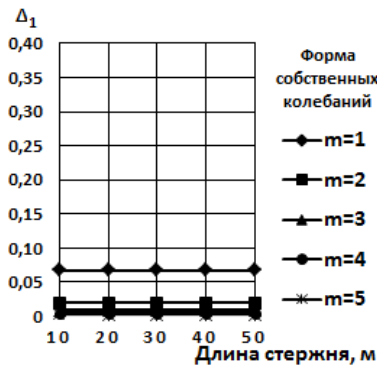


Рис. 3. Вариант $\sigma = 1 \cdot 10^7$ Па

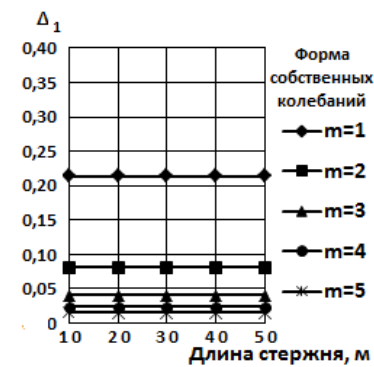


Рис. 4. Вариант $\sigma = 5 \cdot 10^7$ Па

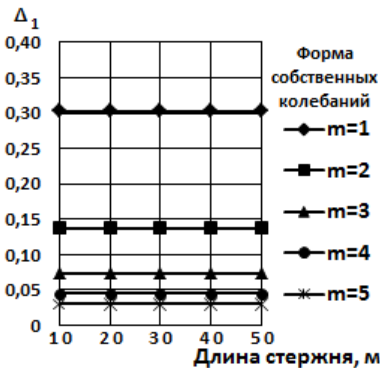


Рис. 5. Вариант $\sigma = 1 \cdot 10^8$ Па

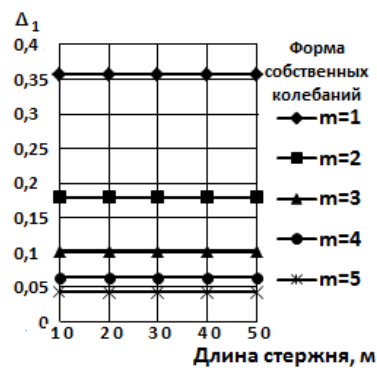


Рис. 6. Вариант $\sigma = 1,5 \cdot 10^8$ Па

Аналогичные результаты характерны для стержня с жестким закреплением слева и свободным правым концом, что видно по рис. 7, 8 для вариантов Δ_2 при $I_0 = I\rho = 1.96 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}$ и $\sigma = 0 \text{ Па}$ (рис. 7) и $\sigma = 1.5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ (рис. 8). Видно также, что влияние напряжения в данном случае больше, чем при шарнирном закреплении.

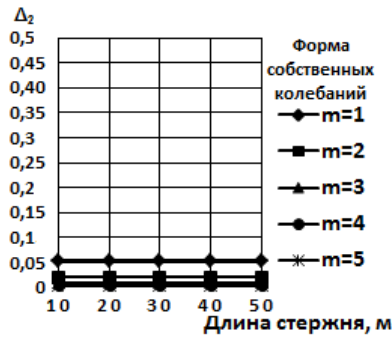


Рис. 7. $\sigma = 0 \text{ Па}$

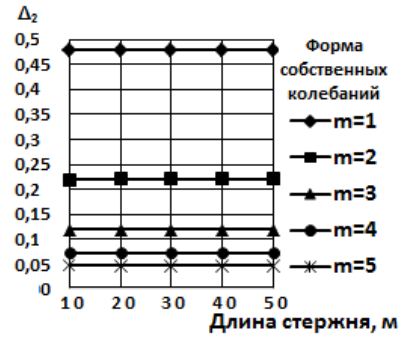


Рис. 8. Вариант $\sigma = 1.5 \cdot 10^8 \text{ Па}$

Оценка влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр собственных частот свободных колебаний стержня численным способом

Задачи (21), (22), (23) имеют аналитическое решение. На практике, например, при нахождении частот колебаний стержня с переменными геометрическими характеристиками, аналитическое решение не всегда можно найти. На сегодняшний день в литературе аналитические решения найдены для ограниченного числа задач.

Для решения задач, не решенных аналитически, применяются численные методы. В данной статье в качестве такого метода предлагается метод алгебраических полиномов степени 5. Для его применения установим точность метода.

Численным методом МАП5 были вычислены расчетные частоты собственных колебаний $\omega_{P_m}^1, \omega_{P_m}^2, m = \overline{1,5}$ с числом узлов сетки $N = 501$ для решенных выше аналитическим методом задач.

Точность численных расчетов предлагаемым МАП5 оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки:

$$\lg|\delta\omega| = \lg \left| \frac{\omega_{T_m}^i - \omega_{P_m}^i}{\omega_{T_m}^i} \right|, m = \overline{1,5}, i = 1,2. \tag{24}$$

где $\omega_{T_m}^i$ – точные значения собственной частоты, определенные аналитическим способом, $\omega_{P_m}^i$ – расчетные значения, найденные МАП5, m – номер формы собственных колебаний, i – номер модельной задачи.

Результаты численных расчетов для модельных задач 1 и 2 приведены на рис. 9–12 графиком зависимости $\lg|\delta\omega|$ от длины стержня.

На графиках видно, что МАП5 обеспечивает точность расчетов не менее, чем с 4 значащими цифрами после запятой.

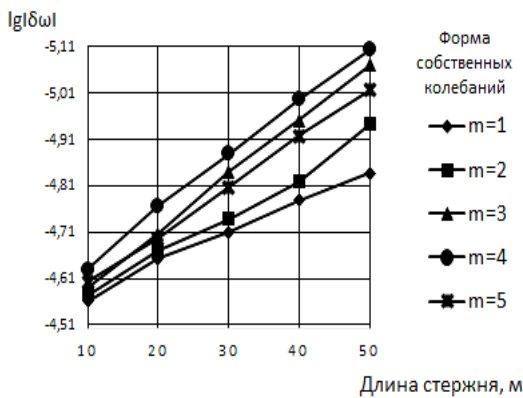


Рис. 9. Погрешности МАП5 для модельной задачи 1 при $\sigma = 0 \text{ Па}$

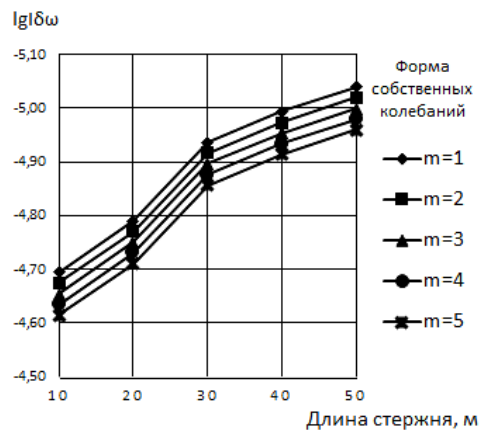


Рис. 10. Погрешности МАП5 для модельной задачи 1 при $\sigma = 1.5 \cdot 10^8 \text{ Па}$

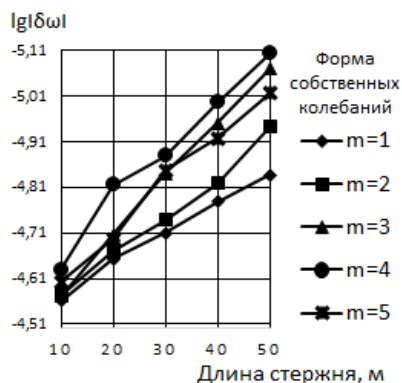


Рис. 11. Погрешности МАП5 для модельной задачи 2 при $\sigma = 0$ Па

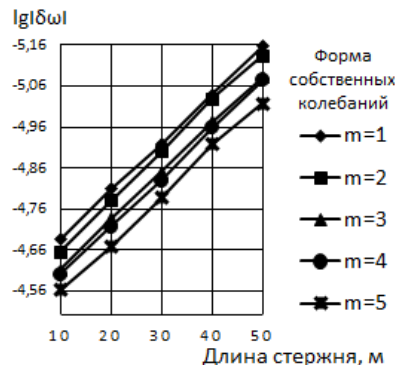


Рис. 12. Погрешности МАП5 для модельной задачи 2 при $\sigma = 1.5 \cdot 10^8$ Па

Полученные результаты позволяют считать, что МАП5 может применяться для нахождения спектра частот задач с переменными геометрическими характеристиками.

Заключение

1. В статье аналитически и с использованием численного метода алгебраических полиномов пятой степени проведено исследование влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр собственных частот свободных колебаний стержня.

2. Аналитическим способом показано, что для стержней, длина которых существенно превышает поперечные размеры, при вычислении спектра собственных частот массовым моментом инерции можно пренебречь. Также показано, что продольная сила оказывает заметное влияние только на низшие частоты.

3. В статье на расчетах собственных частот модельных задач показано, что метод алгебраических полиномов степени 5 обеспечивает точность расчетов с четырьмя значащими числами после запятой. Это позволяет использовать МАП5 для нахождения спектра частот собственных колебаний задач с переменными геометрическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
2. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
3. Феодосьев В. И. Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Метод расчета собственных частот и форм поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением // Вестник УГАТУ. 2019. №3. С. 24–38.
5. Павлов В. П., Кудоярова В. М., Нусратуллина Л. Р. Методика определения податливостей упругих опор консольного упругого стержня на основе частот его собственных колебаний // Вестник УГАТУ. 2021. №1. С. 7–14.
6. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // Вестник УГАТУ. 2022. №1. С. 22–30.
7. Павлов В. П., Нусратуллина Л. Р. Уточнение результатов численных расчетов частот поперечных колебаний стержня переменного сечения с упругим закреплением экстраполяционным методом // Вестник УГАТУ. 2023. №3. С. 29–37.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие. М.: Бинном, 2016. 352 с.

Поступила в редакцию 28.03.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.2.2

**INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE MASS MOMENT OF INERTIA
AND THE LONGITUDINAL FORCE ON THE FREQUENCY SPECTRUM
OF FREE TRANSVERSE VIBRATIONS OF THE ROD**

© V. P. Pavlov, E. M. Nusratullin, L. R. Nusratullina*

*Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

**Email mardliliya@yandex.ru*

In the article, the influence of the mass moment of inertia and the longitudinal force on the frequency spectrum of free transverse vibrations of a straight homogeneous rod is evaluated analytically and by the spline method of algebraic polynomials of the fifth degree. Using high-precision numerical calculations, it is shown that in a rod whose length significantly exceeds the transverse dimensions, when calculating the frequency spectrum of free oscillations, the influence of the mass moment of inertia can be ignored, and the longitudinal force has a noticeable effect only on lower frequencies.

Keywords: rod, transverse vibrations, numerical method, boundary conditions, method of algebraic polynomials, mass moment of inertia, longitudinal force.

Received 28.03.2024 г.