

УДК 532.526

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.3.2

КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СТОЛБА ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ

© Р. А. Башмаков^{1*}, О. Г. Коробчинская¹, З. М. Нагаева²,
А. С. Климина¹

¹Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

²Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, Республика Башкортостан, 450064 г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.

*Email: bashmakov_rustem@mail.ru

В работе исследуется природа касательного напряжения, возникающего при моделировании собственных колебаний столба жидкости в скважине. Показано, что данное напряжение обусловлено силами вязкого трения на стенке и описывается законом Ньютона. На основе уравнений Навье-Стокса в приближении тонкого пограничного слоя и с использованием метода преобразования Лапласа получено аналитическое выражение для касательного напряжения. Установлено, что в нестационарном режиме напряжение определяется не локальным значением градиента скорости, а интегральной зависимостью от предыстории движения жидкости, что приводит к эффекту «памяти» системы. Полученное выражение согласуется с классическими результатами гидродинамики (задача Стокса) и может быть использовано для уточнения математических моделей колебаний жидкости в скважинах.

Ключевые слова: Касательное напряжение, колебания столба жидкости, скважина, пограничный слой, вязкость, преобразование Лапласа, память системы.

Введение

При изучении собственных колебаний столба жидкости в скважине или трубопроводе, вязкие силы, препятствующие движению жидкости, приводящие к затуханию колебаний, могут учитываться различными способами.

При собственных колебаниях вдали от стенки (в «ядре потока») жидкость движется как целое со скоростью $w_0(t)$, однородной по сечению. У стенки из-за вязкости формируется пограничный слой, где скорость изменяется от 0 (условие прилипания) до $w_0(t)$. В классических работах по гидродинамике, таких как задача Стокса о колебаниях пластины или течение Пуазейля, касательное напряжение выражается через локальный градиент скорости. Однако при моделировании нестационарных процессов, таких как собственные колебания столба жидкости, простые стационарные соотношения оказываются недостаточными. В литературе [1–4] рассматриваются различные подходы к описанию вязких напряжений в осциллирующих течениях, однако вопросы строгого вывода выражения для касательного напряжения с учетом нелокальности по времени, а также физического обоснования возникающих интегральных зависимостей, остаются недостаточно проработанными в контексте задач скважинной гидродинамики, хотя приводятся в ряде работ без вывода (см., например, [5–9]). Авторы статьи познакомились с вопросом благодаря профессору В. Ш. Шагапову (см., например, [6–9]), однако нам не удалось найти в литературе вывода для выражения касательного напряжения применительно к задачам, связанным с колебаниями жидкости в нефтяной скважине, возникающими при гидроударе. Приводимые в работах [6; 8] ссылки на книгу Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1], в которой рассматривается задача о пластине, движущейся по поверхности жидкости, вызывали вопросы у рецензентов и читателей о применимости этого подхода для рассматриваемой задачи. В целом ряде работ используются упрощенные (локальные) модели вязкого трения, либо не рассматривается влияние пограничного слоя, что может приводить к существенным погрешностям при описании быстропеременных процессов. Наиболее распространен подход с использованием выражения Дарси-Вейсбаха $\frac{\lambda \rho u |u|}{8}$ для касательного напряжения, где λ – коэффициент трения (зависит от числа Рейнольдса), u – средняя скорость потока (см., например, [12–13]). Такие модели предполагают мгновенную адаптацию профиля скорости к изменениям потока, что неверно при быстрых переходных процессах. При этом, описывая колебания жидкости в скважине, мы получим нелинейные уравнения, решаемые только численными методами.

Целью настоящей работы является физико-математическое обоснование выражения для касательного напряжения, возникающего на стенке скважины при собственных колебаниях столба вязкой жидкости.

Физический смысл касательного напряжения

Касательное напряжение σ – это сила вязкого трения, действующая на единицу площади поверхности стенки скважины со стороны движущейся жидкости. В гидродинамике оно определяется законом Ньютона для вязких жидкостей [10]:

$$\sigma = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad (1)$$

где μ – динамическая вязкость жидкости, w – продольная (осевая) скорость жидкости, r – радиальная координата (расстояние от оси скважины), a – радиус скважины, $\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a}$ – градиент скорости у стенки скважины.

Это выражение следует из закона Ньютона для вязких жидкостей, согласно которому касательное напряжение пропорционально градиенту скорости и направлено перпендикулярно направлению течения. В цилиндрических координатах закон Ньютона в общем случае содержит также член, связанный с радиальной компонентой скорости, однако в рассматриваемом течении радиальная скорость пренебрежимо мала ($v_r \ll w$), поэтому выражение (1) является справедливым.

Постановка задачи для пограничного слоя

Рассмотрим тонкий слой жидкости у стенки скважины ($r \approx a$). В цилиндрической системе координат уравнение Навье-Стокса для продольной скорости $w(r, t)$ в линейном приближении (отсутствие градиента давления, малые колебания) имеет вид [6]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ – кинематическая вязкость, ρ_0 – плотность жидкости. В уравнении (2) опущен член $\nu \partial^2 w / \partial z^2$ в предположении, что изменения скорости вдоль оси скважины происходят значительно медленнее, чем поперек пограничного слоя, что типично для длинных труб.

В тонком пограничном слое $y = a - r \ll a$ можно пренебречь кривизной стенки, разлагая $1/r = 1/(a - y) \approx 1/a + O(y/a^2)$. Член $1/r \partial w / \partial r$ имеет порядок $(1/a)(w_0/\delta)$, а член $\partial^2 w / \partial y^2$ – порядок w_0/δ^2 , где δ – характерная толщина пограничного слоя. Пренебрежение кривизной оправдано при условии $\delta \ll a$, которое в дальнейшем будет проверено для исследуемых колебаний. Тогда уравнение (2) упрощается до уравнения диффузии импульса (вихря) [4]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Здесь y – расстояние от стенки, направленное по нормали внутрь жидкости ($y \geq 0$).

Выпишем граничные и начальные условия.

$$w(0, t) = 0 \quad (\text{условие прилипания на стенке}), \quad (4)$$

$$w(y, t) \rightarrow w_0(t) \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$w(y, 0) = 0 \text{ для всех } y > 0 \text{ (начальное условие)}. \quad (6)$$

Условие (5) означает, что на достаточно большом удалении от стенки вязкие эффекты пренебрежимо малы, и жидкость движется с некоторой заданной скоростью $w_0(t)$, которая в нашей задаче соответствует скорости колебаний столба вдали от стенки. Условие (6) означает, что в начальный момент жидкость неподвижна, колебания начинаются при $t > 0$ под действием некоторого внешнего импульса, который в дальнейшем поддерживает движение ядра со скоростью $w_0(t)$.

Решение задачи с применением принципа Дюамеля

Задача (3)–(6) является линейной. Ее решение для произвольной граничной функции $w_0(t)$ может быть получено с помощью принципа суперпозиции (интеграла Дюамеля) на основе известного решения для единичного скачка.

Рассмотрим вспомогательную задачу, когда внешняя скорость изменяется скачком от 0 до 1 в момент $t = 0$: $w_0(t) = H(t)$ (функция Хэвисайда):

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 1, & \text{если } t \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае решение задачи (3)–(6) с условиями $w(0, t) = 0$, $w(\infty, t) = 1$ хорошо известно (см., например, [11]):

$$w_{\text{единич}}(y, t) = \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right), \quad (7)$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ – функция ошибок. Действительно, подстановка (7) в (3) обращает его в тождество, а граничные условия выполняются: $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Для произвольного $w_0(t)$ с $w_0(0) = 0$ решение получается как свертка производной $\frac{dw_0}{dt}$ с функцией отклика на единичный скачок $w_{\text{единич}}$ (интеграл Дюамеля):

$$w(y, t) = \int_0^t \frac{dw_0}{d\tau}(\tau) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} \right) d\tau. \quad (8)$$

Формула (8) удовлетворяет уравнению (3) и начальному условию.

Касательное напряжение определяется градиентом скорости на стенке. Дифференцируя (8) по y и полагая $y = 0$, получаем:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = \int_0^t \frac{dw_0}{d\tau}(\tau) \left. \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} \right) \right|_{y=0} d\tau. \quad (9)$$

Производная функции ошибок:

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{vt}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi vt}} e^{-y^2/(4vt)}. \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{v(t-\tau)}} \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi v(t-\tau)}}. \quad (11)$$

Подставляя в (9), находим:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dw_0}{d\tau}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Умножая на динамическую вязкость μ , получаем выражение для касательного напряжения:

$$\sigma(t) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu}{\sqrt{\pi v}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dw_0}{d\tau}(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Это основная формула, описывающая касательное напряжение на стенке при произвольном законе движения ядра $w_0(t)$.

Воспользовавшись результатами из книги Г. Карслоу, Д. Егер [11, гл. 14], приведем известное решение для осесимметричной задачи в цилиндрической трубе радиуса a (без приближения плоского слоя). В этом случае изображение скорости дается через модифицированные функции Бесселя

$$\bar{\sigma}(s) = \mu \sqrt{\frac{s}{v}} \frac{I_1(a\sqrt{s/v})}{I_0(a\sqrt{s/v})} \bar{w}_0(s), \quad (14)$$

где I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя. Когда толщина пограничного слоя $\delta \sim \sqrt{v/\omega}$ (ω – характерная частота колебаний) много меньше радиуса трубы, аргумент функций Бесселя велик: $a\sqrt{s/v} \gg 1$. Используя асимптотику $I_1(z)/I_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, из (14) получаем

$$\bar{\sigma}(s) = \mu \sqrt{\frac{s}{v}} \bar{w}_0(s). \quad (15)$$

Обратное преобразование Лапласа выражения (15) дает интеграл (13) (см. [12]), что подтверждает корректность приближения плоской стенки при условии $\sqrt{v/\omega} \ll a$. Для скважин типичного радиуса ($a \approx 0,1$ м) и жидкостей с кинематической вязкостью $\nu \approx 10^{-6}$ м²/с (вода) или $\nu \approx 10^{-4}$ м²/с (нефть) характерная частота собственных колебаний $\omega \sim 1$ с⁻¹ дает $\delta \sim 1$ мм и 10 мм соответственно, что действительно меньше радиуса, поэтому приближение применимо.

Рассмотрим для примера простейший случай, когда скорость внешнего потока изменяется скачком от 0 до V в момент $t = 0$, т.е. $w_0(t) = VH(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Тогда $\frac{dw_0}{d\tau}(\tau) = V\delta(\tau)$, и интеграл в (13) вычисляется:

$$\sigma(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi v}} \int_0^t \frac{V\delta(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{\mu V}{\sqrt{\pi vt}}. \quad (17)$$

Этот результат хорошо известен в гидродинамике: при внезапном приведении в движение полупространства жидкости касательное напряжение на неподвижной стенке убывает как $1/\sqrt{t}$ (см., например, [13, гл. 4]).

Интегральное представление (13) отражает «память системы», напряжение σ в момент времени t зависит от всей предыстории изменения ускорения жидкости dw_0/dt от начального момента до текущего времени; «нелокальность по времени»: мгновенное значение напряжения определяется не только текущим градиентом скорости (как в стационарном случае (1), но и историей движения.

Заключение

В данной работе проведен детальный анализ происхождения и физического смысла касательного напряжения, возникающего при колебаниях столба вязкой жидкости в скважине. На основе уравнений гидродинамики и теории пограничного слоя получено замкнутое выражение для напряжения на стенке.

Подстановка (13) в уравнение баланса сил для столба жидкости позволяет получить замкнутую математическую модель, которая описывает затухание колебаний с учетом «вязкой памяти». Такой подход особенно важен для интерпретации данных гидродинамических исследований скважин, где регистрируются быстропеременные процессы (например, при гидроразрыве пласта [7–9; 14–15]).

Интегральное представление (13) демонстрирует эффект «памяти» системы, которое отражает, что напряжение в текущий момент времени зависит от всей предыстории ускорения жидкости.

Таким образом, предложенный подход позволяет учитывать диссипативные потери при моделировании собственных колебаний столба жидкости в скважине. Интегральное выражение (13) для касательного напряжения может быть обоснованно использовано для построения более точных математических моделей затухания колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 736 с. [Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. 3rd ed., rev. Moscow: Nauka, 1986. 736 p.]
2. Stokes problem. Wikipedia [website]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes_problem (accessed: 20.12.2025).
3. Tani I. History of Boundary Layer Theory // Annual Review of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 9. P. 87–111.

4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. с нем. М.: Наука, 1974. 712 с. [Schlichting H. Boundary-Layer Theory / transl. from German. Moscow: Nauka, 1974. 712 p.].
5. Нурисламов О. Р. Некоторые пристеночные и фильтрационные автомодельные течения с фазовыми переходами: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Уфа, 2009. 109 с. [Nurislamov O. R. Some near-wall and filtration self-similar flows with phase transitions: Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation. Ufa, 2009. 109 p.].
6. Шагапов В. Ш., Галиакбарова Э. В., Хусаинов И. Г., Хакимова З. Р. Акустическое сканирование поврежденных трубопроводов, находящихся в грунте // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. №4. С. 169–178. [Shagapov V. S., Galiakbarova E. V., Khakimova Z. R., Khusainov I. G. Acoustic scanning of damaged pipelines in soil // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. Vol. 59. No. 4. P. 169–178].
7. Башмаков Р. А., Насырова Д. А., Шагапов В. Ш. Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. №1. С. 88–104. [Bashmakov R. A., Nasyrova D. A., Shagapov V. S. Natural vibrations of a fluid in a well connected with formation in the presence of a hydraulic fracture // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2022. Vol. 86. No. 1. P. 88–104.].
8. Шагапов В. Ш., Рафикова Г. Р., Башмаков Р. А., Мамаева З. З. Анализ коллекторских характеристик призабойной зоны пласта, подверженного гидравлическому разрыву по собственным колебаниям столба жидкости в скважине // Инженерно-физический журнал. 2023. Т. 96. №2. С. 281–288. [Shagapov V. S., Rafikova G. R., Bashmakov R. A., Mamaeva Z. Z. Analysis of the collector characteristics of the bottomhole zone of a stratum subjected to a hydraulic fracturing by the natural vibrations of the liquid column in a well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2023. Vol. 96. No. 2. P. 281–289]. DOI: 10.1007/s10891-023-02687-z.
9. Башмаков Р. А., Насырова Д. А., Хакимова З. Р. Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2024. №2. С. 126–134. [Bashmakov R. A., Nasyrova D. A., Khakimova Z. R. Natural vibrations of fluid in a well connected with the reservoir by a system of radial fractures // Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Mekhanika Zhidkosti i Gaza. 2024. No. 2. P. 126–134.]. DOI: 10.31857/S1024708424020115.
10. Navier-Stokes Equations. NASA Glenn Research Center [website]. URL: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html> (accessed: 20.12.2025).
11. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. со 2-го англ. изд. / под ред. А. А. Померанцева. М.: Наука, 1964. 488 с. [Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids / 2nd ed. transl. to Russian, ed. A. A. Pomerantsev. Moscow: Nauka, 1959. 488 p.].
12. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / пер. с нем. Г. А. Вольперт, под ред. Я. З. Цыпкина. М.: Наука, 1965. 288 с. [Doetsch G. Guide to the applications of Laplace transforms / transl. to Russian by G. A. Volpert, ed. Ya. Z. Tsyppkin. Moscow: Nauka, 1965. 288 p.].
13. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / пер. с англ. В. П. Вахомчика, А. С. Попова, под ред. Г. Ю. Степанова. М.: Мир, 1973. 758 с. [Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics / transl. to Russian by V. P. Vakhomchik, A. S. Popov, ed. G. Yu. Stepanov. Moscow: Mir, 1973. 758 p.].
14. Fu J., Su Y., Jiang W., Li S., Chen Y. Wellbore annulus water hammer pressure prediction based on transient multi-phase flow characteristics // Oil & Gas Science and Technology – Revue d'IFP Energies Nouvelles. 2019. Vol. 74. Art. 84.
15. Mondal S. Pressure transients in wellbores: Water hammer effects and implications for fracture diagnostics: PhD thesis. Austin: The University of Texas at Austin, 2010.

Поступила в редакцию 09.04.2026 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.3.2

**TANGENTIAL STRESS IN THE PROBLEM
OF FLUID COLUMN OSCILLATIONS IN A WELL****© R. A. Bashmakov^{1*}, O. G. Korobchinskaya¹, Z. M. Nagaeva²,
A. S. Klimina¹**¹*Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., Ufa, Republic of Bashkortostan, 450076, Russia.*²*Ufa State Petroleum Technological University
1 Kosmonavtov st., Ufa, Republic of Bashkortostan, 450064, Russia.***Email: bashmakov_rustem@mail.ru*

This work investigates the nature of tangential stress arising in the modeling of natural oscillations of a fluid column in a well. It is shown that this stress is caused by viscous friction forces at the wall and is described by Newton's law. Based on the Navier-Stokes equations in the thin boundary-layer approximation and using the Laplace transform method, an analytical expression for the tangential stress is obtained. It is established that in the unsteady regime, the stress is determined not by the local value of the velocity gradient but by an integral dependence on the history of the fluid motion, leading to a “memory” effect of the system. The obtained expression agrees with classical results of fluid dynamics (Stokes problem) and can be used to refine mathematical models of fluid oscillations in wells.

Keywords: tangential stress, fluid column oscillations, well, boundary layer, viscosity, Laplace transform, system memory.

*Received 09.04.2026.***Об авторах / About the authors****Башмаков Рустэм Абдрауфович**

Уфимский университет науки и технологий, Россия,
к.ф.-м.н., доцент кафедры функционального анализа
и программирования.
Email: bashmakov_rustem@mail.ru

Rustem Abdraufovich Bashmakov

Ufa University of Science and Technology, Russia,
Cand. Tech. Sci., Associate Professor of the Department
of Functional Analysis and Programming.
Email: bashmakov_rustem@mail.ru

Коробчинская Ольга Геннадьевна

Уфимский университет науки и технологий, Россия,
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического
и компьютерного моделирования.
Email: korobchinskaya@mail.ru

Olga Gennadievna Korobchinskaya

Ufa University of Science and Technology, Russia,
Cand. Tech. Sci., Associate Professor of the Department
of Mathematical and Computer Modeling.
Email: korobchinskaya@mail.ru

Нагаева Зилья Мунировна

Уфимский государственный нефтяной технический
университет, Россия,
к.ф.-м.н., доцент кафедры информационных технологий
и прикладной математики.
Email: Nagaeva_Zilya@mail.ru

Zilya Munirovna Nagaeva

Ufa State Petroleum Technological University, Russia,
Cand. Tech. Sci., Associate Professor of the Department
of Information Technologies and Applied Mathematics.
Email: Nagaeva_Zilya@mail.ru

Климина Арина Сергеевна

Уфимский университет науки и технологий, Россия,
студент направления подготовки
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ».
Email: arklimina@mail.ru

Arina Sergeevna Klimina

Ufa University of Science and Technology, Russia,
Student in the “Real, Complex and Functional Analysis” program.
Email: arklimina@mail.ru