

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И АДАПТИВНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

© Н. Д. Морозкин, Д. М. Колонских*

Уфимский университет науки и технологий
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

*Email: deniskolonskikh@gmail.com

Предложен и реализован алгоритм адаптивного разбиения трехмерных невыпуклых многосвязных областей на тетраэдральные конечные элементы с автоматическим сгущением сетки вблизи границ и концентраторов напряжений на основе характеристического множества опорных точек и триангуляции Делоне. Для задания трехмерной геометрии используется растровое представление сечений объекта, это позволяет автоматически учитывать сложную форму области. Введен количественный критерий качества конечных элементов. В качестве прикладного примера реализована трехмерная модель нижней челюсти и височно-нижнечелюстного сустава. На основе этой модели методом конечных элементов (МКЭ) в трехмерной постановке рассчитаны поля главных напряжений в височно-нижнечелюстном суставе при центральной, передней и боковой окклюзиях. Полученные результаты согласуются с клиническими данными о зонах концентрации напряжений и подтверждают повышенную нагрузку на балансирующую сторону при боковой окклюзии. Предложенный алгоритм может быть использован в расчетах биомеханики, где требуется дискретизация объектов неправильной формы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, адаптивная триангуляция, триангуляция Делоне, тетраэдральная сетка, височно-нижнечелюстной сустав, биомеханика, напряженно-деформированное состояние.

1. Введение

Биомеханические исследования часто связаны с моделированием объектов, имеющих сложную анатомическую форму: кости скелета, суставные поверхности, кровеносные сосуды, имплантаты. Для численного анализа напряженно-деформированного состояния сложных объектов методом конечных элементов (МКЭ) необходима качественная дискретизация расчетной области. Основные трудности возникают из-за невыпуклости, наличия внутренних полостей, резких изменений кривизны поверхности и необходимости сгущения сетки в зонах ожидаемых высоких градиентов напряжений [1].

Традиционные подходы к дискретизации области часто опираются на ручное построение сеток или использование коммерческих инструментов, что затрудняет воспроизводимость результатов, требует значительных временных затрат и не всегда гарантирует качество элементов в зонах резкого изменения градиентов напряжений [2]. Кроме того, при переходе к трехмерным невыпуклым многосвязным областям стандартные алгоритмы автоматической генерации сеток демонстрируют низкую устойчивость либо чрезмерную вычислительную сложность [3].

Для объектов со сложной геометрией построение регулярной сетки часто невозможно из-за невыпуклости, наличия отверстий и резких изменений кривизны поверхности [4]. Ручное разбиение на элементы требует огромных трудозатрат и не позволяет выполнять адаптацию сетки к ожидаемым градиентам решения. Поэтому разработка эффективных алгоритмов адаптивной триангуляции трехмерных невыпуклых областей является актуальной.

В настоящей работе решается задача разработки полностью автоматизированного алгоритма адаптивного разбиения трехмерных областей на тетраэдральные конечные элементы, интегрированного с эффективным решателем систем уравнений метода конечных элементов (МКЭ). Особое внимание уделяется математическому обоснованию сходимости, контролю качества сетки и оптимизации хранения разреженных матриц жесткости. В качестве демонстрации работоспособности алгоритма приведен расчет полей напряжений в нижней челюсти и височно-нижнечелюстном суставе (ВНЧС) при физиологических нагрузках. Полученные результаты сопоставлены с клиническими данными.

В отличие от классических методов триангуляции Делоне [5], в предложенном алгоритме встроен механизм адаптации плотности узлов на основе характеристической функции, формируемой автоматически по градиентам геометрии и ожидаемых полей напряжений. Дополнительно разработана процедура контроля минимального телесного угла тетраэдров, гарантирующая сходимость МКЭ.

2. Постановка краевой задачи

Рассмотрим изотропное линейно-упругое тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ . Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right),\tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).\tag{3}$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Граничные условия:

- на границе Γ_F заданы векторы приложенной нагрузки $F_i = \sigma_{ij} n_j$ (например, мышечные усилия), n_j – компоненты внешней нормали ($j = 1, 2, 3$);
- на границе Γ_S заданы нулевые перемещения (жесткое закрепление): $u_i = 0$.

Краевая задача сводится к минимизации функционала потенциальной энергии и далее – к системе линейных алгебраических уравнений МКЭ.

3. Адаптивная триангуляция трехмерных областей

3.1. Общая схема.

Дискретизация области Ω производится путем построения характеристического множества опорных точек с последующей триангуляцией Делоне. Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Задание геометрии объекта с использованием набора растровых сечений.
2. Построение характеристической функции $W(x, y, z)$, определяющей принадлежность точки области и требуемую плотность узлов.
3. Генерация характеристического множества опорных точек со сгущением вблизи границы и в зонах высоких градиентов.
4. Построение триангуляции Делоне по полученному множеству точек.
5. Удаление элементов, не принадлежащих области, и оценка качества сетки.

3.2. Геометрическое описание области через растровые сечения.

Геометрия сложного объекта (например, компрессионной лопатки, фрагмента кости или сустава) может быть получена из результатов компьютерной томографии или спроектирована в системе трехмерного моделирования. Область представляется в виде трехмерного растрового изображения (воксельной сетки) с разрешением $L_x \times L_y \times L_z$. Пример такой воксельной фигуры приведен на рис. 1. Для демонстрации принципа модель имеет низкое разрешение – $23 \times 23 \times 9$ вокселей, однако в реальных задачах используется разрешение в тысячи единиц по каждой оси.

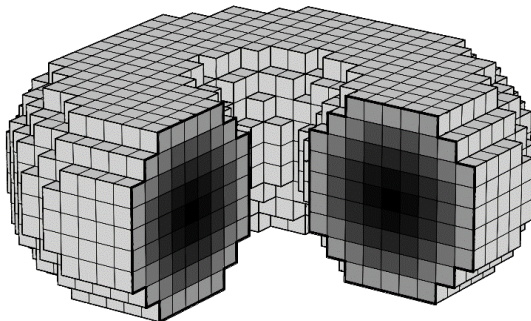


Рис. 1. Задание геометрии растровыми сечениями (воксельная модель).

На трехмерной воксельной модели вводится характеристическая весовая функция $W(x, y, z)$, определяющая плотность распределения опорных точек. Каждый воксель хранит значение $W = 0$ для точек вне области, и $W > 0$ для внутренних точек. Такой способ хранения требует дополнительный объем оперативной памяти, но обеспечивает высокую скорость доступа в дальнейшем итерационном процессе распределения опорных точек – узлов конечно-элементной модели.

3.3. Характеристическая функция и управление плотностью.

Учет особенностей задачи (например, концентрации напряжений) выполняется операцией линейного размытия весовой функции W от «особых точек» (мест приложения нагрузок, острых углов) и границы внутрь области: значение функции увеличивается вблизи поверхности и в местах предполагаемой концентрации напряжений. В результате W увеличивается в зонах, где требуется большее число узлов. Это позволяет в дальнейшем управлять плотностью узлов.

Математически размытие реализуется итеративным алгоритмом: для каждого вокселя (x, y, z)

$$W_{k+1}(x, y, z) = \max \left\{ W_k(x, y, z), \max_{(dx, dy, dz) \in N} (W_k(x + dx, y + dy, z + dz) - h) \right\},$$

где N – окрестность радиуса R , а h – параметр затухания. Процесс повторяется до сходимости. В результате градиент W направлен внутрь области, а у границы значения максимальны.

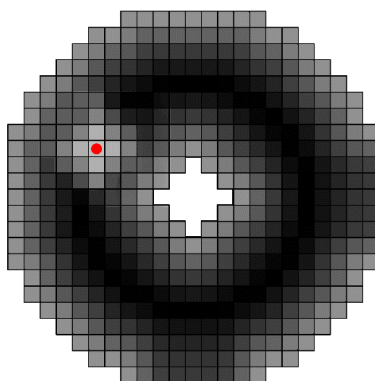


Рис. 2. Характеристическая функция W на сечении объекта.

Красным цветом указана особая точка (область сгущения элементов).

На рис. 2 приведен пример распределения значений характеристической функции на сечении объекта после применения итеративной процедуры. Цветом обозначены значения функции, обеспечивающие повышенную плотность опорных узлов будущей модели вблизи границы и в зонах с высокими градиентами (особых точках), рассчитываемых методом конечных элементов параметров (например, напряжений).

3.4. Распределение опорных точек (узлов КЭ-сетки).

Требуется получить множество точек внутри области, плотность которых пропорциональна $W(x, y, z)$. Генерация выполняется методом случайного бросания с последующей релаксацией:

- случайная точка генерируется с плотностью вероятности $p(x, y, z) \propto W(x, y, z)$ (рис. 3а);
- после генерации заданного числа точек выполняется итеративная процедура отталкивания: каждая точка взаимодействует с соседями в пределах радиуса r , сила отталкивания обратно пропорциональна квадрату расстояния. Весовая функция W влияет на «жесткость» отталкивания: вблизи границы (большие W) точки отталкиваются слабее, благодаря чему сохраняется высокая плотность у границы (рис. 3б).

Для ускорения расчетов используется динамический список соседей. Это снижает сложность алгоритма с $O(N^2)$ до $O(N \cdot k)$, где $k \approx 20$ – средняя длина списка. Точки, вышедшие за пределы области, возвращаются на границу по нормали к поверхности и фиксируются как граничные. В результате получается множество точек с высокой плотностью вблизи заданных областей.

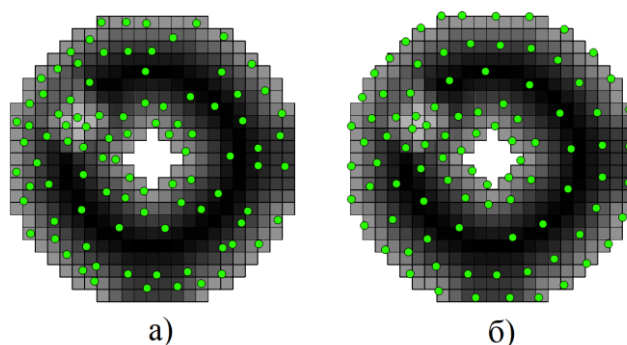


Рис. 3. Множество опорных точек: а) случайная генерация; б) после релаксации.

3.5. Триангуляция Делоне и удаление посторонних элементов.

Построение сетки выполняется по классическому алгоритму Делоне: для каждого тетраэдра описанная сфера не должна содержать других узлов. Реализован алгоритм роста от «активных» граней: для каждой грани ищется точка, не нарушающая условие Делоне, формируется тетраэдр, грани помечаются пассивными или остаются активными (рис. 4).

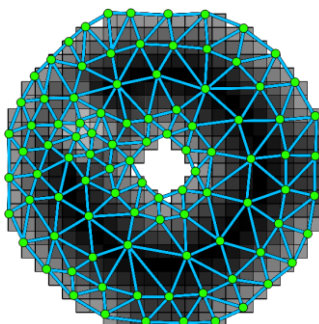


Рис. 4. Построение конечно-элементной сетки на множестве опорных точек.

При моделировании невыпуклых областей часть тетраэдров может выходить за пределы исходной фигуры. Проверка принадлежности тетраэдра области осуществляется по значению характеристической функции в нескольких точках (например, в центре масс или в вершинах вписанной сферы): для значений $W = 0$ в проверочных точках, элемент удаляется.

3.6. Оценка качества сетки.

Качество i -го тетраэдра определяется соотношением:

$$q_i = \alpha \frac{r_i}{R_i},$$

где r_i – радиус вписанной сферы, R_i – длина наибольшего ребра, α – нормирующий коэффициент (для правильного тетраэдра $q_i = 1$ при $\alpha = 2\sqrt{6}$). Общее качество модели определяется как средневзвешенное $\bar{q}$:

$$\bar{q} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M q_i.$$

Обеспечение сходимости МКЭ требует $q_{\min} > q_0$ (практически $q_{\text{сред}} \geq 5.5$) и отсутствие вырожденных элементов (минимальный телесный угол $\theta_{\min} > \theta_0$).

4. Конечно-элементная аппроксимация и численная реализация

На построенной тетраэдральной сетке вводится конечно-элементное пространство кусочно-линейных непрерывных функций. Каждый тетраэдр – элемент с четырьмя узлами (линейный симплекс-элемент). Перемещения внутри элемента аппроксимируются как

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 N_j(x, y, z) u_j,$$

где N_j – интерполирующие базисные функции, равные 1 в j -м узле и 0 в остальных. Матрица жесткости элемента $\mathbf{k}^e$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{k}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \mathbf{V}_e \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ – матрица, связывающая деформации и узловые перемещения, $\mathbf{E}$ – матрица упругих констант (постоянна на элементе), V_e – объем тетраэдра. Интеграл вычисляется точно, поскольку подынтегральное выражение постоянно.

Глобальная система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{K}$ – симметричная положительно определенная разреженная матрица, $\mathbf{F}$ – вектор узловых сил.

Сходимость дискретной задачи обеспечивается при $R \rightarrow 0$ (максимальный размер ребра) и сохранении минимального телесного угла, что гарантируется предложенным алгоритмом контроля качества q_i .

5. Оптимизация решения СЛАУ и хранение разреженных матриц

Размерность системы $\mathbf{K}$ для реальных задач достигает $10^4 - 10^5$ неизвестных. Прямое хранение полной матрицы неэффективно. Применен следующий комплекс мер:

- **Упорядочение узлов.** Использован модифицированный алгоритм Катхилла-Макки на основе корневой структуры уровней. Начиная с произвольного узла, последовательно нумеруются соседи (уровень 1), затем соседи непронумерованных узлов уровня 1 (уровень 2) и т.д. Алгоритм позволяет минимизировать максимальную разность номеров узлов одного элемента, что приводит к ленточной структуре $\mathbf{K}$ с минимальной полулентой m .
- **Диагональная схема хранения.** Ненулевые элементы поддиагоналей нижнего треугольника сохраняются в прямоугольном массиве размерности $n \times (m + 1)$. В среднем это сокращает требуемую память более чем в 10 раз.
- **Метод Холецкого.** Матрица раскладывается в произведение $\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, где $\mathbf{L}$ – нижняя треугольная матрица. Алгоритм реализован в форме скалярных произведений, адаптированной под компактное хранение:

$$L_{ii} = \sqrt{K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}, \quad L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik} \right), \quad j > i.$$

Решение системы сводится к прямой и обратной подстановкам. Положительная определенность $\mathbf{K}$ гарантирует отсутствие деления на ноль и высокую численную устойчивость.

6. Результаты расчета на примере нижней челюсти

Разработанный алгоритм применен для расчета напряжений, возникающих в нижней челюсти человека с височно-нижнечелюстным суставом (ВНЧС). Исходные данные – набор компьютерных томограмм, по которым построена поверхность. Модель построена на основе анатомического прототипа, содержит зубы, тело челюсти, венечный и суставной отростки, суставной диск. Характеристическая функция W задана так, чтобы сгустить сетку в области суставной головки, суставного отростка и по границе кости. Автоматическое разбиение дало 18757 тетраэдров и 5293 узлов конечно-элементной модели. Сгущение сетки выполнено в височной области и у границы раздела материалов (рис. 5). Среднее качество элементов $q_{cp} = 6,2$, минимальный телесный угол $\theta_{\min} > 18^\circ$.

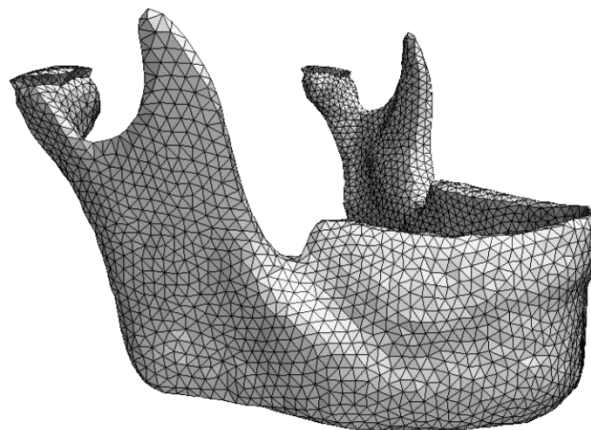


Рис. 5. Конечно-элементная модель нижней челюсти человека.

При проведении расчетов приняты параметры кортикальной кости ($E = 1,37 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,3$), дентина ($E = 1,56 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,3$) и суставного диска ($E = 4,375 \cdot 10^3$ МПа, $\mu = 0,3$) [7]. Нагрузки моделируют сокращение жевательных, височных и крыловидных мышц по данным электромиографии. Рассматривались три фазы жевательного цикла: центральная, передняя и боковая окклюзии.

Рассмотрены три основных функциональных положения нижней челюсти (окклюзии), составляющих жевательный цикл:

1. Центральная окклюзия – смыкание зубов при максимальном количестве контактов, суставные головки в центральном положении.
2. Передняя окклюзия – контакт передних зубов, головки смещены вперед и вниз.
3. Боковая окклюзия (правая) – жевательная нагрузка на правой стороне, левая – балансирующая.

Нагрузки от жевательной, височной и крыловидных мышц заданы по данным Вебера [8] (табл.). Жесткое закрепление задается на поверхностях зубных рядов (окклюзионный контакт) и на суставном диске (контакт с впадиной черепа).

Таблица

Величины мышечных сил (максимальные значения)

Мышца	Сила, Н
Жевательная	750
Височная	800
Внутренняя крыловидная	400
Наружная крыловидная	300

В каждом типе окклюзии силы пересчитываются с учетом направления и долевого участия мышц.

Результаты расчета напряжений

- Центральная окклюзия. Поле напряжений симметрично относительно срединной плоскости. Максимальные главные напряжения $\sigma_1^{\max} \approx 10,06$ МПа локализованы у основания суставного отростка и во внешне-переднем отделе суставной головки. В суставном диске напряжения достигают 8,7 МПа (~1,46 раза больше, чем в головке), что подтверждает его амортизирующую функцию.
- Передняя окклюзия. Нагрузка смещается на фронтальную группу зубов. Максимальные напряжения снижаются до 5,18 МПа, однако зона концентрации сохраняется в переднем отделе диска. При равных мышечных усилиях передняя окклюзия создает более высокий градиент напряжений в диске, чем центральная.
- Боковая окклюзия. Нагрузка несимметрична. На балансирующей стороне напряжения в суставной головке достигают 7,81 МПа, в диске – 10,78 МПа, что в 1,47–1,66 раза превышает показатели рабочей стороны. Это согласуется с клиническими данными о преимущественном возникновении дисфункциональных состояний именно на балансирующей стороне при одностороннем жевании или потере жевательных зубов [9].

Поле перемещений показывает, что максимальные упругие деформации (до 0,15 мм) возникают в венечном отростке и углу нижней челюсти – зонах прикрепления жевательных мышц.

Полученные результаты хорошо согласуются с данными клинических исследований [10] и демонстрируют, что предложенная методика адаптивной триангуляции позволяет создавать адекватные конечно-элементные модели для сложных биомеханических объектов.

7. Заключение

1. Разработан и программно реализован алгоритм адаптивной триангуляции сложных трехмерных невыпуклых областей, обеспечивающий автоматическое сгущение сетки вблизи границ и заданных концентраторов напряжений на основе характеристической функции и триангуляции Делоне.

2. Предложена процедура упорядочения узлов КЭ-модели и диагональная схема хранения разреженных матриц жесткости, что в сочетании с методом Холецкого позволяет эффективно решать системы порядка 10^4 – 10^5 с минимальными требованиями к оперативной памяти.

3. На примере трехмерной модели нижней челюсти и ВНЧС продемонстрирована корректность и устойчивость предложенного алгоритма. Получены количественные оценки главных напряжений при различных окклюзиях, выявлены зоны концентрации, совпадающие с клинически значимыми участками поражения сустава.

4. Разработанный программный комплекс может быть применен для моделирования напряженно-деформированного состояния биомеханических и инженерных объектов со сложной геометрией, а также для оптимизации ортопедических и хирургических вмешательств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трунин Д. А., Ревякин А. В., Постников М. А. и др. Исследование напряженно-деформированного состояния математической модели челюстных костей методом конечных элементов // Аспирантский вестник Поволжья. 2019. №1–2. С. 131–139. [Trunin D. A., Revyakin A. V., Postnikov M. A., et al. Finite element study of the stress strain state of a mathematical model of jaw bones // Postgraduate Bulletin of the Volga Region. 2019. No. 1–2. P. 131–139].
2. Матвеев А. Д. Метод многосеточных конечных элементов в анализе напряженного состояния упругих тел // Информационные технологии и математическое моделирование в экономике, технике, экологии, образовании, педагогике и торговле. 2016. №9. С. 51–68. [Matveev A. D. Multigrid finite element method in the analysis of the stress state of elastic bodies // Information Technologies and Mathematical Modeling in Economics, Engineering, Ecology, Education, Pedagogy and Trade. 2016. No. 9. P. 51–68].
3. Wang Ya, Daraql B., Wang Y., et al. Biomechanical effects of different mandibular movements and torque compensations during mandibular advancement with clear aligners: a finite element analysis // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. 2024. Vol. 12. Art. 1496517.
4. Труфанова Е. В., Коженов В. Ю., Кулиничев А. С., Хохлов М. Н. Применение метода подконструкций для решения задач больших размерностей МКЭ. В сб.: Актуальные проблемы науки и техники. 2023: Материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции, Ростов-на-Дону, 15–17 марта 2023 г. / отв. ред. Н. А. Шевченко. Ростов-на-Д: Донской государственный технический университет, 2023. С. 896–897. [Trufanova E. V., Kozhenov V. Yu., Kulnichev A. S., Khokhlov M. N. Application of the substructure method for solving large-scale finite element problems. In: Current Problems of Science and Technology. 2023: Proceedings of the All-Russian (National) Scientific-Practical Conference, Rostov-on-Don, March 15–17, 2023 / ed. N. A. Shevchenko. Rostov-on-Don: Don State Technical University, 2023. P. 896–897].
5. Тырин Д. А. Триангуляция Делоне. В сб.: Наука молодых: сб. мат-лов Межрегиональной молодежной научной конференции, посвященной памяти Н. А. Фролова, Сыктывкар, 23–24 мая 2024 г. Сыктывкар: Сыктывкарский гос. ун-тет им. Питирима Сорокина, 2024. С. 24–28. [Tyurin D. A. Delaunay triangulation. In: Young Science: Proceedings of the Interregional Youth Scientific Conference Dedicated to the Memory of N. A. Frolov, Syktyvkar, May 23–24, 2024. Syktyvkar: Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, 2024. P. 24–28].
6. Андреев В. К. Математические модели механики сплошных сред. СПб: Лань, 2015. 240 с. [Andreev V. K. Mathematical models of continuum mechanics, St. Petersburg: Publishing House “Lan”, 2015. 240 p.].
7. Шахалиева Л. Р., Сорокина Н. Д., Польма Л. В. Нейрофизиологические показатели и оценка болевого синдрома в диагностике начальных форм дисфункции ВНЧС. В сб.: Физико-химическая биология: мат-лы XI Междунар. научной интернет-конференции, Ставрополь, 30 марта 2023 г. Ставрополь: Ставропольский гос. мед. ун-тет, 2023. С. 88–91. [Shakhaliyeva L. R., Sorokina N. D., Polma L. V. Neurophysiological indicators and pain syndrome assessment in the diagnosis of initial forms of temporomandibular joint dysfunction. In: Physicochemical Biology: Proceedings of the XI International Scientific Internet Conference, Stavropol, March 30, 2023. Stavropol: Stavropol State Medical University, 2023. P. 88–91].
8. Дударь О. И., Бобина Д. И., Пешин С. Е. Сравнение способов теоретического определения усилий в жевательных мышцах и реакции в височно-нижнечелюстном суставе // Master's Journal. 2018. №1. С. 172–185. [Dudar O. I., Bobina D. I., Peshin S. E. Comparison of methods for theoretical determination of forces in masticatory muscles and reactions in the temporomandibular joint // Master's Journal. 2018. No. 1. P. 172–185].
9. Ключников О. В., Подкорытов Ю. М., Никитин О. Н. Изменение в височно-нижнечелюстном суставе при функциональной патологии зубочелюстной системы. В сб.: Актуальные проблемы и перспективы развития стоматологии в условиях Севера: сб. статей Всероссийской научно-практ. конференции с междунар. участием, посвященной 55-летию профессиональной деятельности доцента кафедры терапевтической, хирургической, ортопедической стоматологии и стоматологии детского возраста ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова» Михайловой Розалии Ивановны, Якутск, 21 ноября 2025 г. Якутск: изд-во СВФУ, 2025. С. 140–144. [Klyushnikov O. V., Podkorytov Yu. M., Nikitin O. N. Changes in the temporomandibular joint in functional pathology of the dentofacial system. In: Current Problems and Prospects for the Development of Dentistry in the North: Collection of Articles of the All-Russian Scientific-Practical Conference with International Participation Dedicated to the 55th Anniversary of the Professional Activity of Associate Professor Mikhailova Rozaliya Ivanovna, Yakutsk, November 21, 2025. Yakutsk, North-Eastern Federal University Publishing House, 2025. P. 140–144].
10. Мишутин Е. А. Результаты функциональных методов исследования состояния ВНЧС у пациентов с внутренними нарушениями ВНЧС и пациентов группы сравнения. В сб.: Актуальные проблемы стоматологии детского возраста и ортодонтии: Сб. научных статей XV региональной научно-практ. конференции с междунар. участием по детской стоматологии, Хабаровск, 10 октября 2025 г. Хабаровск: изд-во «Антар», 2025. С. 127–133. [Mishutin E. A. Results of functional methods for studying the state of the temporomandibular joint in patients with internal temporomandibular joint disorders and in a comparison group. In: Current Issues in Pediatric Dentistry and Orthodontics: Collection of Scientific Articles of the XV Regional Scientific-Practical Conference with International Participation on Pediatric Dentistry, Khabarovsk, October 10, 2025. Khabarovsk: Publishing House “Antar”, 2025. P. 127–133].

Поступила в редакцию 14.07.2026 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2026.3.3

**STRESS ANALYSIS IN THREE-DIMENSIONAL NON-CONVEX DOMAINS
OF COMPLEX GEOMETRY USING THE FINITE ELEMENT METHOD
WITH ADAPTIVE TRIANGULATION**

©N. D. Morozkin, D. M. Kolonskikh*

*Ufa University of Science and Technology
32 Zaki Validi st., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.***Email: deniskolonskikh@gmail.com*

This paper presents the development and implementation of an adaptive meshing algorithm for partitioning three-dimensional non-convex multiply connected domains into tetrahedral finite elements. The algorithm provides automatic mesh refinement near boundaries and stress concentration zones by employing a characteristic set of reference points in conjunction with Delaunay triangulation. The three-dimensional geometry is defined using raster representations of object cross-sections, enabling automatic handling of complex domain shapes. A quantitative criterion for assessing finite element quality is introduced. The effectiveness of the approach is demonstrated through a three-dimensional finite element model of the human mandible and temporomandibular joint (TMJ). Using this model, principal stress distributions in the TMJ are calculated under central, anterior, and lateral occlusion conditions. The numerical results show good agreement with clinical data regarding stress concentration patterns and confirm the elevated load on the balancing side during lateral occlusion. The proposed algorithm is well-suited for biomechanical computations requiring the discretization of irregularly shaped objects.

Keywords: finite element method, adaptive triangulation, Delaunay triangulation, tetrahedral mesh, temporomandibular joint, biomechanics, stress-strain state.

*Received 14.07.2026.***Об авторах / About the authors****Морозкин Николай Данилович**

Уфимский университет науки и технологий, Россия,
д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель
института информатики, математики и робототехники.
Email: MorozkinND@mail.ru

Morozkin Nikolay Danilovich

Ufa University of Science and Technology, Russia,
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Scientific Director
of the Institute of Computer Science, Mathematics and Robotics.
Email: MorozkinND@mail.ru

Колонских Денис Михайлович

Уфимский университет науки и технологий, Россия,
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического
и компьютерного моделирования.
Email: deniskolonskikh@gmail.com

Kolonskikh Denis Mikchailovich

Ufa University of Science and Technology, Russia,
Cand. Sci. (Phys.-Math), Associate Professor
of the Department of Mathematical and Computer Modeling
Email: deniskolonskikh@gmail.com